Exercice 4.6

On considère le tenseur σ défini dans le repère (O,x,y,z) par les deux scalaires $\alpha \neq 0$ et β :

$$\frac{\sigma}{\sigma_0}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\\ \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_0 = 100 \text{ MPa}$$

Calculer les trois invariants du tenseur σ.

$$\sigma=\sigma_0\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\\ \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \text{tr}\sigma=\alpha\sigma_0\ ,\ \Sigma_{II}=-\beta^2\sigma_0^2 \text{ MPa}^2 \text{ et } \det\sigma=0$$

le tenseur n'est pas inversible. Cependant, la sous-matrice $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & 0\end{pmatrix}$ l'est.

De quel angle et autour de quel axe faut-il tourner le repère (O,x,y,z) pour le tenseur σ devienne diagonal ?

On inverse la sous-matrice $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & 0\end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix}\alpha\text{-x} & \beta\\ \beta & -\text{x}\end{vmatrix}=-x(\alpha\text{-x})-\beta^2=x^2-\alpha\text{x}-\beta^2=0,\quad \text{x}=\left(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}\right)/2$$

Et on cherche l'angle qui annule σ_{xy}' :

$$\begin{pmatrix}\sigma_{xx}' & \sigma_{xy}'\\ \sigma_{yx}' & \sigma_{yy}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\qquad (4.24)$$

$$\sigma_{xy}^{'}=\text{sc}\left(\sigma_{yy}-\sigma_{xx}\right)+\left(\text{c}^2\text{-s}^2\right)\sigma_{xy}=0 \text{ avec } \sin2\theta=2\text{sc et } \text{c}^2-\text{s}^2=\cos2\theta$$

Il vient $\text{tg } 2\theta = \sin2\theta/\cos2\theta = 2\sigma_{xy}/\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)=2\beta/\alpha$. NB : si $\beta = 0, \theta = 0$.

Déterminer les composantes normale, t_n, et tangentielle, t_τ, de la densité de forces de contact, t, pour la direction x = y = z en fonction de σ_0, α et β.

$$\text{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } \text{t}=\sigma\text{n}=\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \beta\\ 0\end{pmatrix},\ \text{t}_\text{n}=\sigma\text{n.n}=\frac{\sigma_0}{3}(\alpha+2\beta) \text{ et } \text{t}_\tau=\sqrt{\text{t}^2\text{-t}_\text{n}^2}=\frac{\sigma_0}{3}\sqrt{2\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2}=\frac{\sigma_0}{3}\sqrt{\alpha^2+(\alpha+\beta)^2+\beta^2}$$

Exercice 4.7

Dans le repère des contraintes principales (**e**$_{I}$, **e**$_{II}$, **e**$_{III}$), on considère le champ de contraintes σ défini par : $\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_I & 0 & 0\\ 0 & \sigma_I & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{III}\end{pmatrix}$

Quelles sont les densités de forces de contact normale et tangentielle possibles ?

On reprend les équations 4.35 dans le cas particulier ou les deux premières valeurs propres sont égales :

$$t=\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_1 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1 n_1\\ \sigma_1 n_2\\ \sigma_3 n_3\end{pmatrix}, t_n=\sigma_1 n_1^2+\sigma_1 n_2^2+\sigma_3 n_3^2 \text{ et } t^2=t_\tau^2+t_n^2$$

On élimine n_1, n_2 et n_3 :

$$t_\tau^2+\left(t_n-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2$$, ce qui est un demi-cercle de rayon $\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$

Dessiner le cercle de Mohr correspondant.

le tri-cercle de Mohr qui représente l'ensemble des couples (t_n,t_τ) quand la normale n balaie l'espace dégénère dans ce cas à un demi-cercle.

Exercice 4.8

Soit dans un repère orthonormé (**e**$_1$, **e**$_2$, **e**$_3$). On considère le champ de contraintes σ défini par :

$$\sigma=\begin{pmatrix}10 & 5\sqrt{3} & 0\\ 5\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix} \text{ en MPa.}$$

Déterminer les contraintes principales $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ **ainsi que les directions principales (e_I, e_{II}, e_{III}). On rangera les contraintes principales par valeurs décroissantes.**

La direction ez est une direction propre associée à la valeur propre 10 MPa. Le polynôme caractéristique du second ordre donne les 2 autres v. p : -5 et 15 MPa.

$$n \text{ ? tel que } \sigma e = \begin{pmatrix}10 & 5\sqrt{3} & 0\\ 5\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix} e = -5e, \text{ donne } \left[\begin{array}{l}15x+5\sqrt{3}y=0\\ 5\sqrt{3}x+5y=0\\ 5z=0\end{array}\right.$$

$$\text{On trouve } e_{III}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix} \text{ et } e_I=e_{II}\otimes e_{III}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de passage [A] du repère (e$_1$, e$_2$, e$_3$) au repère des contraintes principales (e_I, e_{II}, e_{III}).

Le vecteur e_I est le vecteur e_x tourné de 30° autour de l'axe z donc la base propre est la base de départ tournée de 30° selon l'axe z et la matrice de passage A s'écrit alors :

$$A=\begin{pmatrix}c & s & 0\\ -s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & 0\\ -1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ avec } c=\cos 30° \text{ et } s=\sin 30°$$

Montrer que $A\sigma A^T$ **est effectivement diagonale.**

$$A\sigma A^t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & 0\\ -1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 5\sqrt{3} & 0\\ 5\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 & 0\\ 1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

Pour une direction n quelconque, déterminer les composantes normale, t_n, et tangentielle, t_τ, de la densité de force t. Dessiner le cercle de Mohr.

On classe les 3 vp par ordre décroissant et on dessine le tri-cercle de Mohr.

Déterminer l'ellipse des contraintes dans le plan (e_I, e_{II}) associé aux deux plus grandes valeurs propres.

$n_z = 0$ et $t = \sigma n = \begin{pmatrix} 15n_x \\ 10n_y \end{pmatrix}$ donne $\left(\frac{t_x}{15}\right)^2 + \left(\frac{t_y}{10}\right)^2 = 1$

t décrit une ellipse de demi-axes 15 et 10

Soit n le vecteur unitaire de composantes $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ dans (e_I, e_{II}, e_{III}). Montrer que la composante tangentielle de la densité de forces de contact est maximum.

$$t = \sigma n = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix},\ t_n = \frac{1}{2}(15-5) = 5 \text{ MPa}$$

$t^2 = \frac{1}{2}(15^2+25) = 125$ MPa $t_\tau = \sqrt{125-25} = 10$ MPa

On se situe bien sur le tir-cercle de Mohr sur le point maximum en contrainte tangentielle.

Exercice 4.12

L'état de contraintes homogènes dans un milieu continu est donné en MPa par rapport à un système d'axes cartésiens Oxyz par le tenseur : $\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 3\sqrt{3} & 0 \\ 3\sqrt{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

Que devient ce tenseur dans un repère Ox'y'z' tourné de -30 deg autour de l'axe Oz ?

$$\sigma' = P\sigma P^t = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelles sont les contraintes principales ?

Les contraintes principales sont -4, 8 et 12 MPa.

Dessiner les cercles de Mohr associé à ce tenseur et préciser leur signification.

On range les 3 valeurs propres par ordre décroissant :

$\sigma_I = 12$ MPa, $\sigma_{II} = 8$ MPa et $\sigma_{III} = -4$ MPa

Le tri-cercle de Mohr associé à ce tenseur des contraintes représente l'ensemble des couples (t_n,t_τ) quand la normale n balaie l'espace.

Déterminer la contrainte de cisaillement maximum et la contrainte normale correspondant. Dans le repère associé aux contraintes principales, déterminer les composantes de la normale n correspondant au cisaillement maximum.

Sur le tri-cercle de Mohr, on lit :

$t_\tau^{max} = (\sigma_I - \sigma_{III})/2 = 8$ MPa

en $t_n = (\sigma_I + \sigma_{III})/2 = 4$ MPa

Ce point correspond aux 4 directions: $n = \begin{pmatrix} \pm 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \pm 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ dans le repère principal.